

Työraportti 2013-10

TERO-mittausten matemaattinen mallintaminen ja tulkinta

Pekka Kekäläinen
Jyväskylän yliopisto
Fysiikan laitos

Elokuu 2013

Posivan työraporteissa käsitellään käynnissä olevaa
tai keskeneräistä työtä. Esitetyt tulokset ovat alustavia.

TERO-mittausten matemaattinen mallintaminen ja tulkinta

TIIVISTELMÄ

Tässä raportissa tarkastellaan systemaattisia virheitä, joita syntyy, kun TERO-mittalaitteen lämpenemistä mallinnetaan erilaisilla yksinkertaistetuilla kaksikulotteisilla sylinterisymmetrisillä malleilla. Oletamme, että mittalaite on joka hetki kauttaaltaan samassa lämpötilassa, joka tunnetaan tarkasti, ja lisäksi oletamme, että laskuissa käytetyt parametrit (laitteen ominaislämpökapasiteetti ja teho pituusyksikköä kohti) tunnetaan tarkasti. Näillä oletuksilla voimme melko luotettavasti arvioida, että mallien yksinkertaistavat oletukset aiheuttavat korkeintaan 2 – 5 % suuruisen virheen lopputuloksiin.

Avainsanat: TERO-mittaus, analyttinen malli, sylinterisymmetria, systemaattinen virhe.

Mathematical Modelling and Evaluation of TERO measurements

ABSTRACT

In this work systematic errors in modelling temperature responses of the TERO measuring probe, using simplified two-dimensional cylindrical models, are studied. It is assumed that the temperature of the probe at any moment is the same everywhere and accurately known, and that the parameters used in the calculation (specific heat capacity and linear heating power per unit length of the probe) are known precisely. With these assumptions, it can be reasonably estimated that the simplifying assumptions cause at most an error of 2-5% in the final results.

Keywords: TERO measurement, analytical model, cylindrical symmetry, systematic error.

SISÄLLYSLUETTELO

TIIVISTELMÄ

ABSTRACT

ESIPUHE	2
1 MITTALAITTEEN MATEMAATTINEN MALLI	3
2 SYSTEMAATTISTEN VIRHEIDEN ARVIOINTIA	5
2.1 Vesikerroksen vaikutus	5
2.1.1 Sovitus generoituun testiaineistoon	5
2.1.2 Sovitus mitattuihin havaintoihin	7
2.2 Äärellisen pituinen lämmönlähde	10
2.3 Asymptoottinen malli	11
2.3.1 Sovituksia testiaineistoon	13
2.3.2 Mittalaitteen äärellisen pituuden vaikutus	14
2.3.3 Sovituksia mitattuihin koetuloksiin	16
3 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ	18
LÄHDELUETTELO	19

ESIPUHE

Tämä työ on tehty Posivan toimeksiantona Saanio&Riekkola Oy:ssä kirjoittajan ollessa siellä vierailevana tutkijana. Toimeksiannon yhteyshenkilöinä ovat olleet Margit Snellman Saanio&Riekkola Oy:ssä ja Lasse Koskinen Posivassa. Työtä ovat ohjanneet prof. Jussi Timonen Jyväskylän yliopiston fysiikan laitokselta ja dos. Aimo Hautojärvi Posivasta. Työ liittyy GTK:n Posivalle tekemiin tutkimuksiin kallion lämpötekniisten ominaisuuksien selvittämiseksi.

1 MITTALAITTEEN MATEMAATTINEN MALLI

TERO-mittalaitteesta on kaksi eri versiota eri kokoisia kairanreikiä, joiden nimellishalkaisijat ovat 56 mm ja 76 mm, varten. Yksityiskohtaiset kuvaukset mittalaitteista löytyvät raporteista [4] ja [5]. Tässä työssä tarkastellaan mittausta 56 mm:n reiässä. Mittalaite koostuu 1,63 m pitkästä, halkaisijaltaan 50 mm olevasta alumiiniputkesta, jonka seinämän paksuus on 5 mm, sekä lämmitysvastuksista ja mittauselektronikasta. Mittalaite laskeaan kairanreikään, joka on täynnä vettä, joten mittalaitteen ja reiän seinämän välissä on vesikerros.

Laitteen matemaattisena mallina käytetään äärettömän pitkää sylinterimäistä lämmönlähdettä, joka on homogeenista äärettömän hyvin lämpöä johtavaa materiaalia, jonka tiheys ja ominaislämpökapasiteetti pituusyksikköä kohti valitaan samoiksi kuin mittalaitteen vastaavat keskimääräiset ominaisuudet. Vesikerroksen eristävä vaikutus mallinnetaan lämmönsiirtovastuksena eli kontaktiresistanssina laitteen ja kallion välillä.

Jos laitetta lämmitetään hetkestä $t = 0$ alkaen vakioteholla P , niin kallion lämpötilan (T_2) ja mittalaitteen lämpötilan (T_1) kehitystä ajan (t) ja säteen (ρ) funktiona voidaan sylinterikoordinaateissa kuvata [1] yhtälöillä

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_2}{\partial \rho} &= \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad \rho > a, \quad t > 0 \\ -K_2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho} &= \frac{Q}{2\pi a} - \frac{\rho_1 c_{p1} a}{2} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad \rho = a, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

kun käytetään alku- ja reunaehtoja

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 &= 0, \quad t = 0, \\ -K_2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho} &= H(T_1 - T_2), \quad \rho = a, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

missä κ_2 on kallion lämpödiffuusiokerroin, K_2 on kallion lämmönjohtumiskerroin, ρ_1 on lähdealueen tiheys, c_{p1} sen ominaislämpökapasiteetti, a sen säde ja Q on laitteen lämmitysteho pituusyksikköä kohti. Kontaktiresistanssin käänteisarvolle käytämme ohuen eristekerroksen approksimaatiota $H = K/d$, missä d on vesikerroksen paksuus ja K on veden lämmönjohtumiskerroin.

Yhtälöt voidaan ratkaista käyttämällä Laplace-muunnosta muuttujan t suhteen. Lämpötilalle T_1 saadaan siten integraaliesitys [1]

$$T_1(t) = \frac{2Q\alpha^2}{\pi^3 K_2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\kappa_2 t u^2/a^2}}{u^3 (\Psi^2(u) + \Phi^2(u))} du, \quad (1.3)$$

missä

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= u J_0(u) + (\beta u^2 - \alpha) J_1(u), \\ \Phi(u) &= u Y_0(u) + (\beta u^2 - \alpha) Y_1(u).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Tässä J_i ja Y_i ($i = 0, 1$) ovat Besselin funktioita, ja parametreina ovat

$$\alpha = \frac{2 c_{p_2} \rho_2}{c_{p_1} \rho_1}, \quad \beta = \frac{K_2 d}{K a},\tag{1.5}$$

missä ρ_2 ja c_{p_2} ovat kallion tiheys ja ominaislämpökapasiteetti.

Kallion lämmönjohtumiskertoimen määrittämiseksi sovitetaan mitattuun lämpötilakehitykseen $T_1(t)$ eo. mallin tuottama ratkaisu käyttämällä sovituseroita kallion lämmönjohtumiskerrointa K_2 ja vesikerroksen paksuutta d . Vesikerroksen paksuutta emme tunne tarkkaan, sillä kairanreiän koko vaihtelee kairauksissa jonkin verran.

Mallista saadaan vielä johdettua yksinkertaistettu tulos. Ratkaisun asymptoottinen käyttäytyminen rajalla $t \rightarrow \infty$ on muotoa [1]

$$T_1(t) = \frac{Q}{4 \pi K_2} \left(\log \frac{4 \kappa_2 t}{a^2} - \gamma + 2 \beta \right),\tag{1.6}$$

missä γ on Eulerin vakio. Logaritmisella aika-asteikolla esitettynä T_1 kasvaa asymptoottisesti vakionopeudella, joka riippuu vain lämmitystehosta ja kallion lämmönjohtumiskertoimesta. Tämä antaa yksinkertaisen tavan määrätä kallion lämmönjohtumiskerroin. Edellytyksenä on kuitenkin se, että käytetty mittausaika on riittävän pitkä, jotta rajoittamattoman mallin ratkaisu on riittävän lähellä asymptoottista rajaa, ja toisaalta riittävän lyhyt, jottei mittalaitteen äärellisen pituuden vaikutus näkyisi merkittävästi.

2 SYSTEMAATTISTEN VIRHEIDEN ARVIOINTIA

Mallissa on kaksi oleellista yksinkertaistusta, joiden vaikutusta seuraavassa tarkastelemme: vesikerroksen vaikutus ja laitteen äärellinen pituus. Asymptoottisen mallin osalta tarvitsemme lisäksi tietoa asymptoottisen rajan aikaskaalasta.

2.1 Vesikerroksen vaikutus

Jos lisäämme aikaisempaan malliimme mukaan vesikerroksen, niin tilannetta voidaan kuvata yhtälöillä

$$\begin{aligned}
 -K_1 \frac{\partial T_1}{\partial \rho} &= \frac{Q}{2\pi a} - \frac{\rho_m c_{pm} a}{2} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \rho = a, \quad t > 0 \\
 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_1}{\partial \rho} &= \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad a < \rho < a + d, \quad t > 0 \\
 \frac{\partial^2 T_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_2}{\partial \rho} &= \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad \rho > a + d, \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

jolloin alku- ja reunaehdot ovat

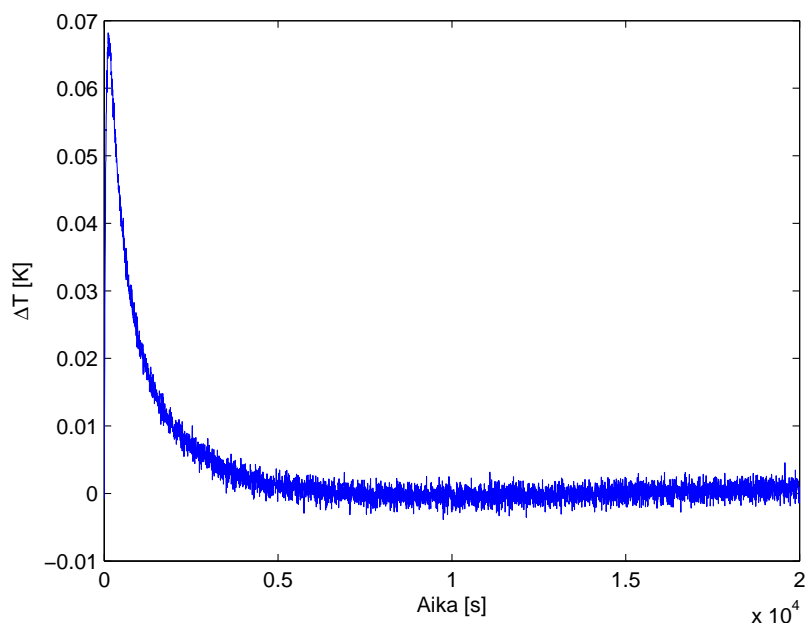
$$\begin{aligned}
 T &= T_1 = T_2 = 0, \quad t = 0, \\
 T &= T_1, \quad \rho = a, \quad t > 0, \\
 T_1 &= T_2, \quad K_1 \frac{\partial T_1}{\partial \rho} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho}, \quad \rho = a + d, \quad t > 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

missä T on mittalaitteen, T_1 veden ja T_2 kallion lämpötila; κ_1 on veden ja κ_2 kallion lämpödiffuusiokerroin; K_1 on veden ja K_2 kallion lämmönjohtumiskerroin; ρ_m on lähdealueen tiheys, c_{pm} sen ominaislämpökapasiteetti ja a sen säde sekä d on vesikerroksen paksuus. Pienet kontaktiresistanssit laitteen ja veden sekä veden ja kallion välillä jätetään tässä ottamatta huomioon. Näiden yhtälöiden analyttistä ratkaisua ei tunneta, mutta ne voidaan ratkaista numeerisesti differenssimenetelmällä.

2.1.1 Sovitus generoituun testiaineistoon

Testiaineisto 1

Vesikerroksen vaikutusta arvioimme generoimalla testiaineistoa, jossa edellä esitetyn mallin (2.1) ratkaisuun on lisätty gaussista kohinaa. Ratkaisussa käytettiin kallion tiheydelle ja ominaislämpökapasiteetille arvoja $\rho_2 = 2740 \text{ kg/m}^3$, $c_{p2} = 725 \text{ J/kg K}$, lämmitystehona pituusyksikköä kohti käytettiin arvoa $Q = 14,87 \text{ W/m}$. Testiaineistoksi ratkaistiin 20 000 sekuntia pitkä mittalaitteen lämpötilan aikakehitys parametreillä $K_2 = 2,98 \text{ W/m K}$ ja $d = 3 \text{ mm}$, ja lisättiin siihen kohinaa.



Kuva 1. Mallin 1 tuottaman optimaalisen ratkaisun ja vastaavan testiaineisto 1:n välinen erotus.

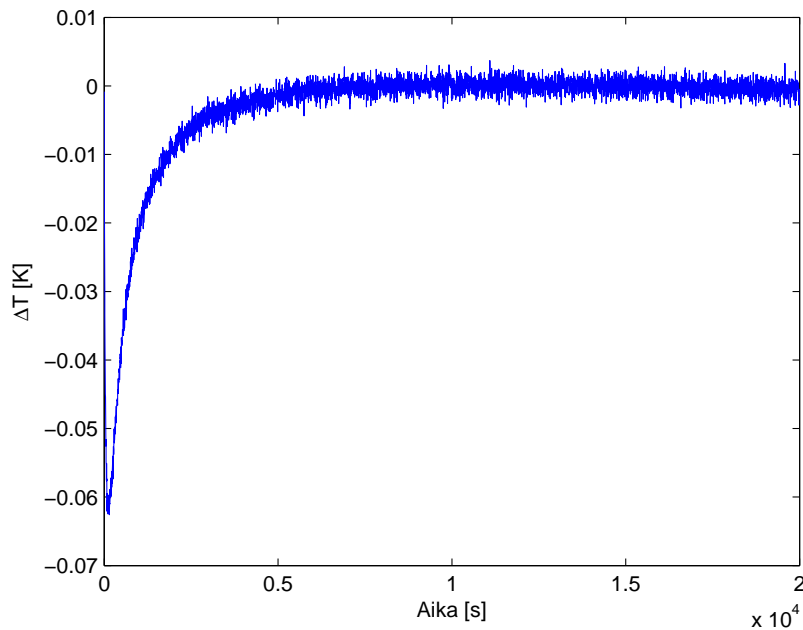
Malli 1 ja malli 2

Testiaineistoon 1 teimme sovituksia ratkaisua (1.3) hyödyntävien yksinkertaistettujen mallien avulla. Sovitus tehtiin kahdella tavalla: ensimmäisessä mallissa mittalaitteen lämpökapasiteettina käytetään alumiiniputken lämpökapasiteettia eikä vesikerroksen lämpökapasiteettia oteta mitenkään huomioon (malli 1) ja toisessa sovituksessa vesikerroksen lämpökapasiteetti sisällytettiin laitteen lämpökapasiteettiin (malli 2).

Sovituksissa minimoitiin mallin ja testiaineiston neliöllistä poikkeamaa aikavälillä 5000 - 20 000 s. Sovitusta ei tehty aivan lämmityksen alusta lukien, koska lämmityksen alkuvaiheessa mallit eivät kuvaa vesikerroksen lämpenemisestä johtuvaa transienttilannetta. Kuvissa 1 ja 2 on näytetty mallin 1 ja mallin 2 testiaineistoon 1 optimoidun ratkaisun ja testiaineiston välinen erotus.

Mallin 1 sovitus tuotti optimaaliseksi kallion lämmönjohtumiskertoimeksi $K_2 = 2,90$ W/m K ja mallin 2 arvoksi $K_2 = 3,01$ W/m K. Vastaavat vesikerroksen paksuudet olivat $d = 2,0$ mm ja $d = 2,4$ mm. Syy sille, että malli 1 tuottaa hieman liian pienen lämmönjohtumiskertoimen on se, että malli optimoi jonkinlaista vesikerroksen ja kallion keskimääräistä lämmönjohtumiskerrointa. Malli 2 taas ei ota huomioon vesikerroksen lämpötilajakaumaa, mikä näkyy sovituksen alun systemaattisena poikkeamana. Lämpötilan kasvun hidastuessa vesikerroksen lämpötilajakauman vaikutus kuitenkin pienenee ja malli kuvaa lämpötilan kehitystä erittäin hyvin. Silmämääräisesti arvioituna kumpikin malli kuvaa hyvin testiaineiston aikakehitystä.

Näiden tulosten nojalla voidaan todeta, että mallia 2 käytettäessä vesikerroksen vaikutuksen tuottama systemaattinen virhe lämmönjohtavuuden arvioon on noin yksi tai kor-



Kuva 2. Mallin 2 tuottaman optimaalisen ratkaisun ja testiaineisto 1:n välinen erotus.

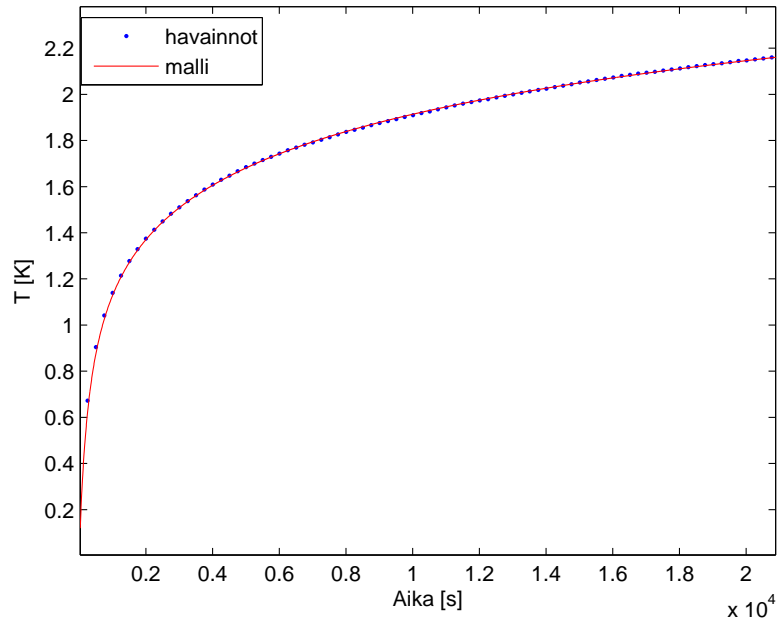
keintaan muutama prosentti tarkastellussa tapauksessa, jolloin lämmönlähteen pituus on ääretön.

2.1.2 Sovitus mitattuihin havaintoihin

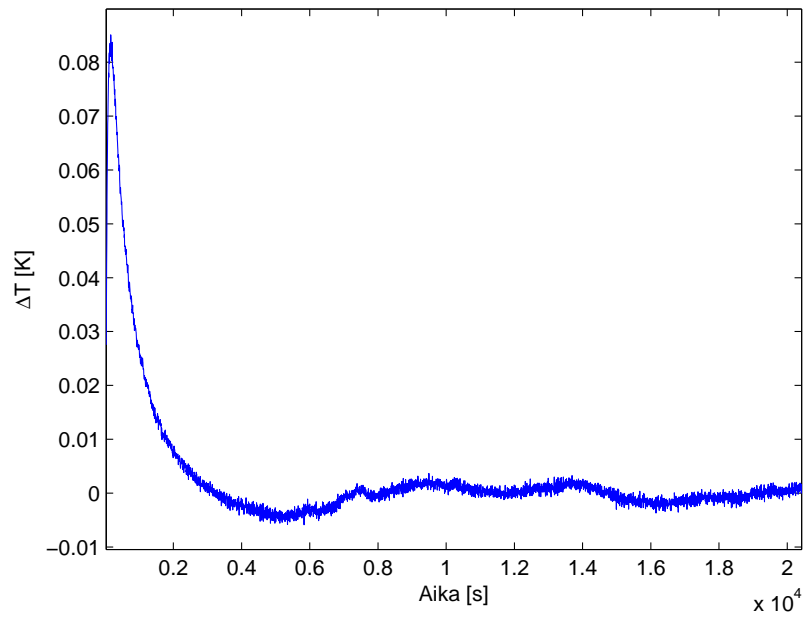
Edellisessä kohdassa saatujen tulosten soveltumista käytännön mittauksiin voidaan arvioida tekemällä vastaavia sovituksia mitattuihin havaintoihin. Kuvassa 3 on esitetty kokeelliset havainnot ja mallin 2 niihin optimoitu ratkaisu; kuvissa 4 ja 5 on esitetty mallin 1 ja mallin 2 optimoitujen ratkaisujen ja havaintojen välinen erotus.

Tulokset ovat erittäin hyvin sopusoinnussa mallien tuottamien ennusteiden kanssa; vajaan tunnin lämmityksen jälkeen mallin ja havaintojen välillä ei ole havaittavissa systemaattista poikkeamaa. Lämpötilan pienet vaeltelut johtuvat lämmitystehon vaihteluista, jotka on esitetty kuvassa 6. Mallin 1 tuottama kallion lämmönjohtumiskerroin on $K_2 = 3,32$ W/m K ja vastaava vesikerroksen paksuus on $d = 2,9$ mm. Kuten testiaineisto 1:n tapauksessa, malli 2 tuottaa hieman suuremmat arvot kuin malli 1: $K_2 = 3,47$ W/m K ja $d = 3,4$ millimetriä.

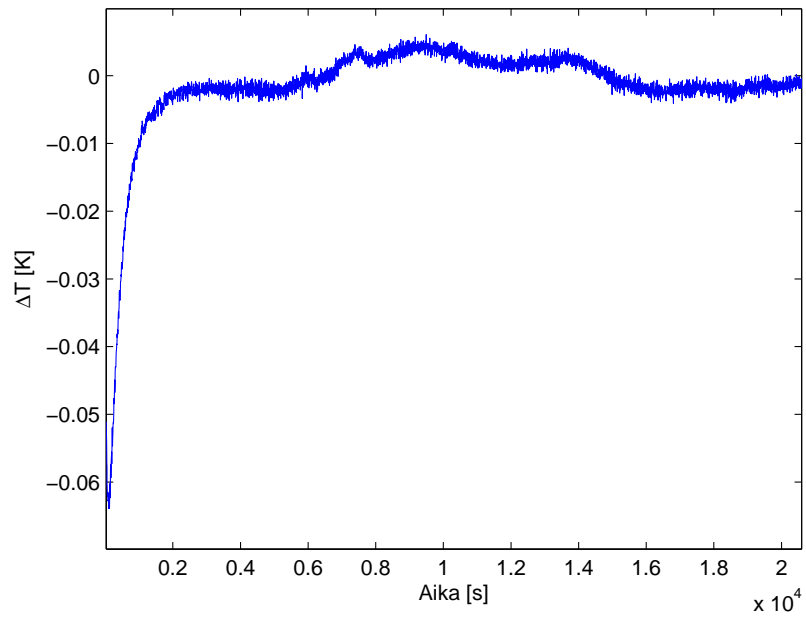
Vesikerroksen huomioon ottavan, numeerisesti ratkaistun mallin (2.1) sovittaminen kokeellisiin havaintoihin tuottaa kallion lämmönjohtumiskertoimeksi $K_2 = 3,55$ W/m K ja vastaavaksi vesikerroksen paksuudeksi $d = 4,3$ mm. Kuvasta 7 näkyy, että jo 15 minuutin lämmityksen jälkeen tämän mallin antama lämpötilakehitys vastaa erittäin hyvin havaintoja erojen ollessa vain asteen muutaman tuhannesosan suuruisia. Poikkema alussa johtunee mittalaitteen epätasaisesta lämpenemisestä.



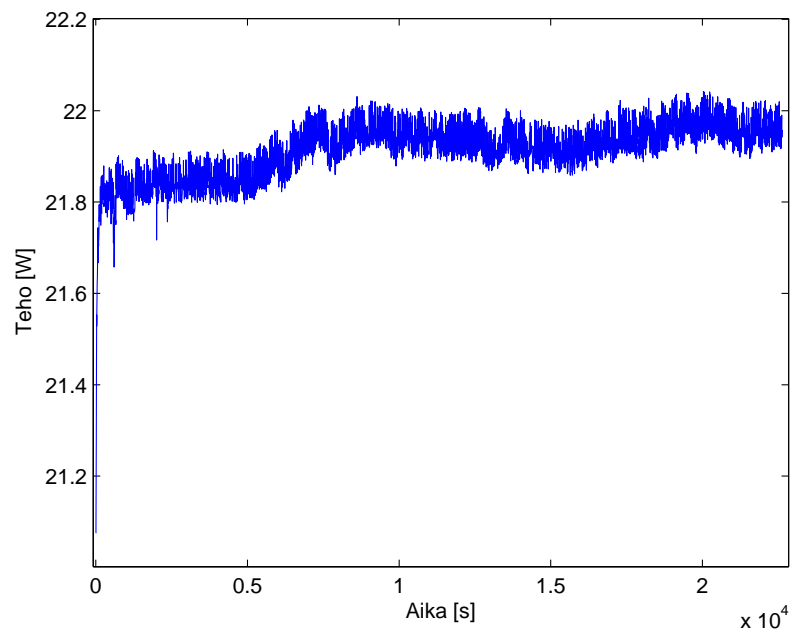
Kuva 3. Mallin 2 optimoidun ratkaisun vertaaminen havaintoihin (joka viideskymmenes havaintopiste on näytetty).



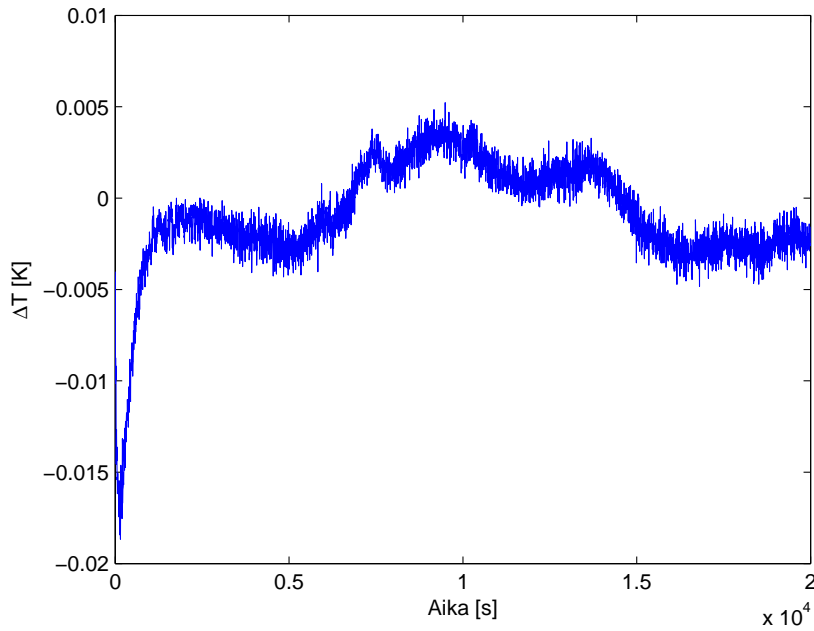
Kuva 4. Mallin 1 optimoidun ratkaisun ja havaintojen välinen erotus.



Kuva 5. Mallin 2 optimoidun ratkaisun ja havaintojen välinen erotus.



Kuva 6. Lämmitysteho mittauksen aikana.



Kuva 7. Mallin (2.1) optimoidun ratkaisun ja kokeellisten havaintojen välinen erotus.

Näiden havaintojen nojalla voimme suhteellisen luottavaisin mielin pitää edellisessä kohdassa saatuja tuloksia ja niistä vedettyjä johtopäätöksiä järkevinä ja käytäntöön soveltuvina.

2.2 Äärellisen pituinen lämmönlähde

Yksinkertaistetun mallin mukaiset yhtälöt (1.1) äärellisen pituiselle lämmönlähteelle eivät ole analyttisesti ratkaistavissa. Äärellisen pituuden vaikutusta voidaan kuitenkin tutkia toisella tavoin yksinkertaistetulla "katkaistun lämmönlähteen mallilla", joka on analyttisesti ratkaistavissa. Tarkastellaan a -säteisen sylinterin (akselina z -akseli) ulkopuolista aluetta reunaehtona vakio lämpövuon välillä $|z| < b/2$ ja eristetty reuna muualla. Tämä vastaa tilannetta, missä vesikerros, kontaktiresistanssi ja laitteen lämpökapasiteetti jätetään ottamatta huomioon. Mallia voidaan sylinterikoordinaateissa kuvata yhtälöllä

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \rho > a, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

jonka ratkaisu toteuttaa reunaehdon

$$-K \frac{\partial T}{\partial \rho} = \begin{cases} q, & \rho = a, \quad |z| < b/2, \quad t > 0, \\ 0, & \rho = a, \quad |z| \geq b/2, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

missä q on lämpövuoto sylinterin pinnalta ulos, K materiaalin lämmönjohtumiskerroin ja κ lämpödiffuusiokerroin; alkuehdoksi asetetaan $T = 0$. Tämän yhtälön ratkaisu on [2]

$$T = \frac{q \kappa}{\pi a K} \int_0^t \int_0^\infty \left(\operatorname{erf} \left(\frac{b/2+z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{b/2-z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right) \times e^{-\kappa t u^2/a^2} \frac{Y_0(\rho u/a) J_1(u) - J_0(\rho u/a) Y_1(u)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du dt, \quad (2.5)$$

missä

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (2.6)$$

Aikaintegraali voidaan esittää erikoisfunktioden avulla [2]. Verrataan äärellisen pituisen lämmönlähteen lämpötilakehityksen eroa äärettömän pitkän sylinterin lämpötilakehitykseen, joka voidaan esittää muodossa [3]

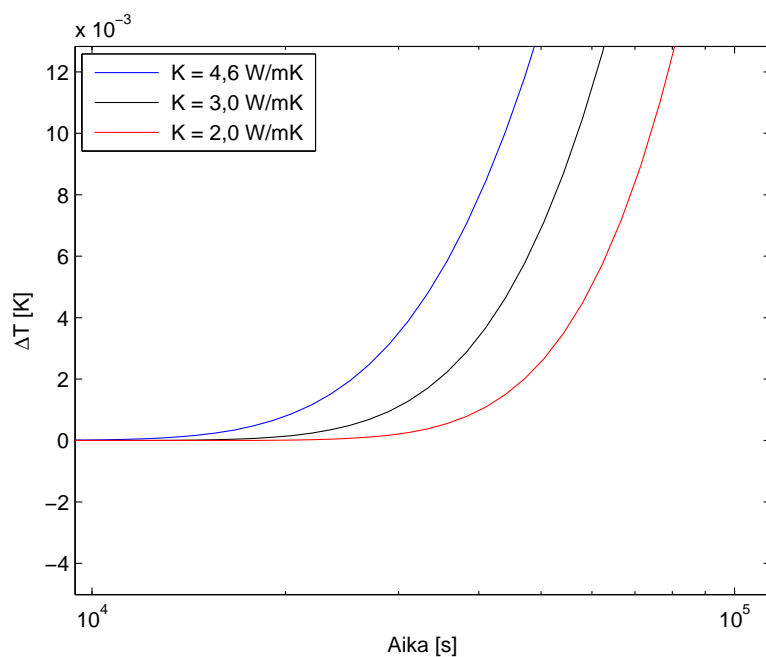
$$T = \frac{2 q a}{\pi K} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\kappa t u^2/a^2}}{u^2} \frac{Y_0(\rho u/a) J_1(u) - J_0(\rho u/a) Y_1(u)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} du. \quad (2.7)$$

Tarkastellaan lämpötilan kehitystä sylinterin pinnalla ($\rho = a$) tasossa $z = 0$. Käytetään samoja parametreja kuin edellisissä laskuissa: kallion tiheys $\rho_2 = 2740 \text{ kg/m}^3$ ja ominaislämpökapasiteetti $c_{p2} = 725 \text{ J/kg K}$, alueen lämmitysteho $q = 22,3 \text{ W}$ ja pituus $b = 1,5 \text{ m}$.

Kuvassa 8 on rajoittamattoman (2.7) ja äärellisen pituisen lämmönlähteen (2.5) tuottamien sylinterin pinnan lämpötilakehitysten välinen erotus kolmella eri lämmönjohtumiskertoimen arvolla. Kuvan perusteella laitteen äärellisen pituuden vaikutus lämpötilaan käytetyillä lämmitysajoilla (noin 6 tuntia) on korkeintaan tuhannesosa-asteen suuruusluokkaa, joten sen vaikutus lopputuloksiin on merkityksetön. Kun tuotamme testiaineistoa äärellisen pituisen lämmönlähteen mallilla ja teemme siihen sovituksen rajoittamattoman lämmönlähteen mallilla, niin saatu lämmönjohtumiskerroin on muutaman promillen tarkkuudella sama kuin lähtöarvo.

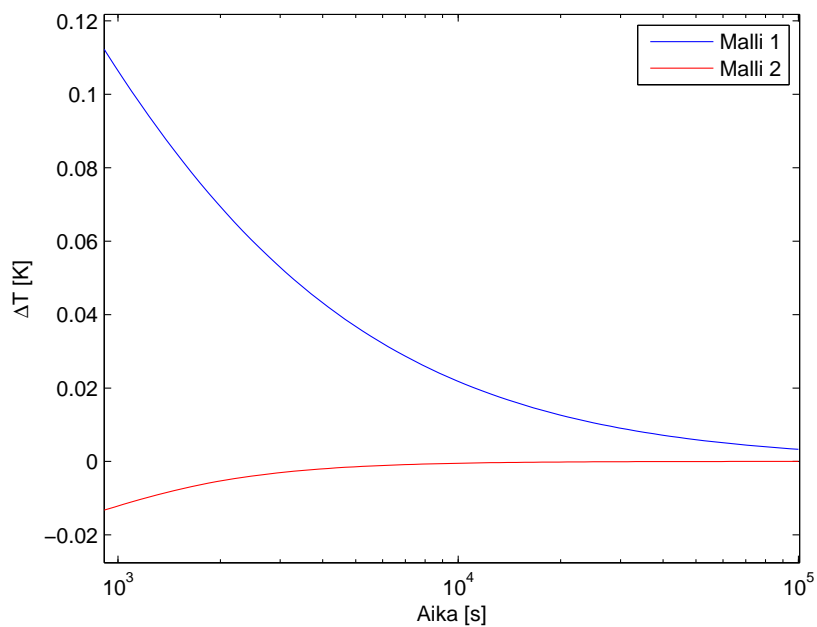
2.3 Asymptoottinen malli

Asymptoottisella mallilla tarkoitamme rajoittamattoman lämmönlähteen tuottaman lämpötilan käyttäytymistä "pitkän" ajan kuluttua eli asymptoottista käyttäytymistä (1.6). Edellä näimme, että käytetyillä mittausajoilla laitteen äärellisen pituuden vaikutus on vielä suhteellisen pieni. Näin ollen asymptoottisen mallin käyttäminen on järkevää, jos rajoittamattoman mallin ratkaisu on "riittävän lähellä" asymptoottista rajaansa käytetyillä mittausajoilla. Kuvassa 9 on esitetty mallien 1 ja 2 ratkaisun (1.3) ja asymptoottisen käyttäytymisen (1.6) erotus samoilla parametreillä, joita käytimme aiemmin testiaineisto 1:n



Kuva 8. Rajoittamattoman ja äärellisen pituisen lämmönlähteen tuottamien sylinterin pinnan lämpötilakehitysten välinen erotus.

generoimiseen ($\rho_2 = 2740 \text{ kg/m}^3$, $c_{p2} = 725 \text{ J/kg K}$, $K_2 = 2,98 \text{ W/m K}$, $d = 3 \text{ mm}$ ja $Q = 14,87 \text{ W/m}$).



Kuva 9. Mallien 1 ja 2 ratkaisujen poikkeama asymptoottisesta rajastaan.

Kuvasta 9 näkyy, että mallien 1 ja 2 ratkaisut lähestyvät asymptootista rajaansa eri puolilta. Käytetyillä mittausajoilla malli 2 on noin tunnin kuluttua lämmityksen aloittamisesta muutaman tuhannesosa-asteen päässä asymptoottisen mallin antamasta arvosta, joten asymptoottisen mallin sovittaminen tässä tapauksessa tuntuu luontevalta.

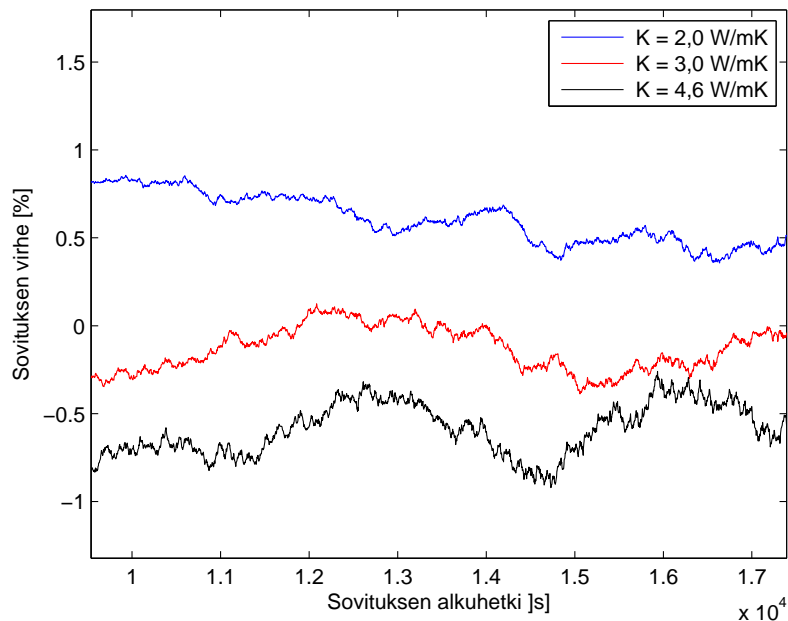
2.3.1 Sovituksia testiaineistoon

Arvioidaan seuraavassa asymptoottisen mallin virhettä testiaineistojen avulla.

Testiaineistot 2 ja 3

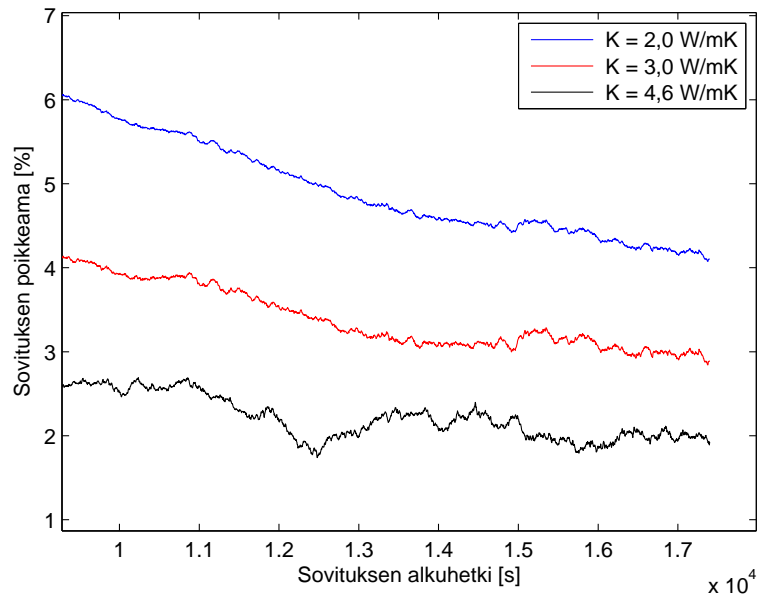
Testiaineisto 2 tuotetaan lisäämällä mallin 1 ratkaisuun gaussista kohinaa ja testiaineisto 3 tuotetaan samalla tavalla mallin 2 ratkaisusta. Ratkaisut lasketaan samoilla parametreilla kuin aiemmin: $\rho_2 = 2740 \text{ kg/m}^3$, $c_{p2} = 725 \text{ J/kg K}$, $Q = 14,87 \text{ W/m}$ ja $d = 3 \text{ mm}$. Asymptoottisen mallin sovitus näihin aineistoihin tehdään pienimmän neliösumman menetelmällä noin tunnin mittaiseen aikasarjaan.

Kuvassa 10 on esitetty asymptoottisen mallin sovituksella saadun lämmönjohtumiskertoimen suhteellinen poikkeama testiaineisto 3:n generoinnissa käytetystä lämmönjohtumiskertoimesta mallissa 2.



Kuva 10. Asymptoottisen mallin testiaineistoon 3 (malli 2) tehdyn sovituksen virhe.

Kuvan 10 perusteella asymptoottista mallia käyttämällä päästään noin prosentin tarkkuudella samaan lämmönjohtumiskertoimen arvoon kuin mallilla 2. Kuvassa 11 on esitetty vastaavat sovituksot testiaineistolle 2 (malli 1). Tässä tapauksessa asymptoottisen mallin sovitus antaa lämmönjohtumiskertoimelle systemaattisesti 3 - 5% suuremman arvon kuin mallilla 1 tehty sovitus.



Kuva 11. Asymptoottisen mallin testiaineistoon 2 (malli 1) tehdyn sovituksen virhe.

Tarkastellaan seuraavaksi vesikerroksen vaikutuksesta ja asymptoottisen mallin käyttämisestä aiheutuvien virheiden yhteisvaikutusta. Aiemmin havaitsimme, että malli 2 antaa noin prosentin tarkkuudella saman lämmönjohtumiskertoimen kuin vesikerroksen lämpenemisen huomioon ottava malli (2.1) ja asymptoottinen malli antaa noin prosentin tarkkuudella saman tuloksen kuin malli 2, joten asymptoottinen malli antaa käytetyillä mitausajoilla noin parin prosentin tarkkuudella saman tuloksen kuin malli (2.1). Tämä näkyy myös kuvassa 12, jossa asymptoottista mallia on sovitettu mallilla (2.1) tuotettuun testiaineistoon 1.

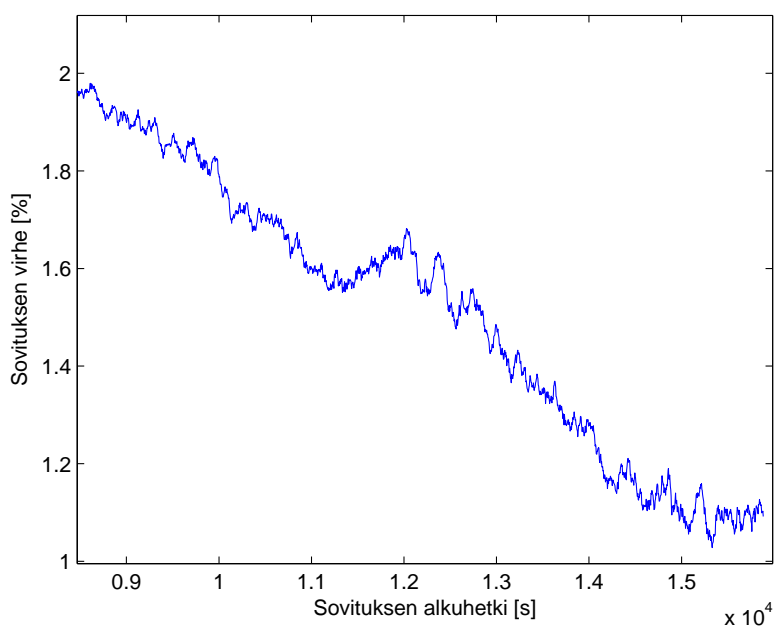
2.3.2 Mittalaitteen äärellisen pituuden vaikutus

Kuten kuvasta 8 nähdään, alkaa mittalaitteen äärellinen pituus vaikuttaa nopeasti lämmitysajan kasvaessa yli kuuden tunnin. Tarkastellaan seuraavaksi miten tämä vaikuttaa asymptoottisen mallin antamien tulosten pätevyYTEEN.

Testiaineisto 4

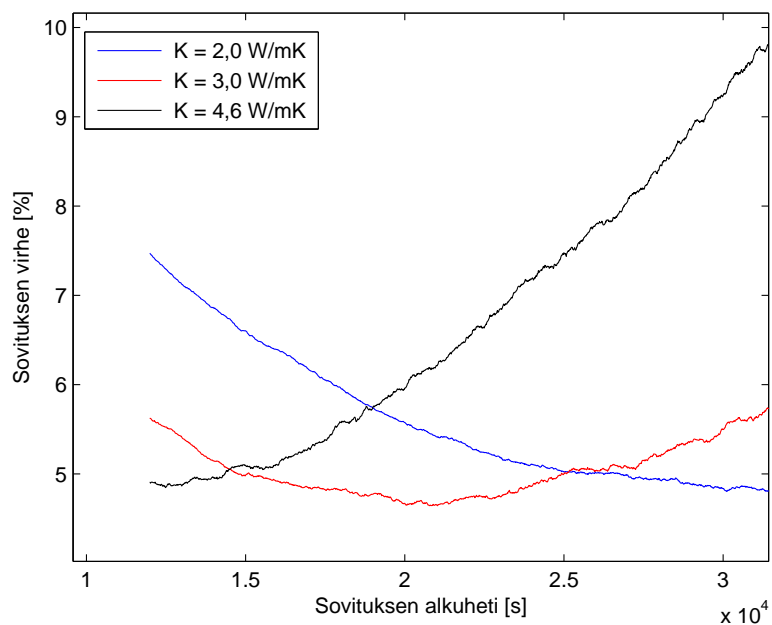
Samaan tapaan kuin edellä generoidaan testiaineisto 4 äärellisen pituisen lämmönlähteen mallilla (2.5) ja sovitetaan siihen vastaavan rajoittamattoman mallin ratkaisun (2.7) asymptoottinen käyttäytyminen

$$T(t) = \frac{qa}{2K} \left(\log \frac{4\kappa_2 t}{a^2} - \gamma \right). \quad (2.8)$$



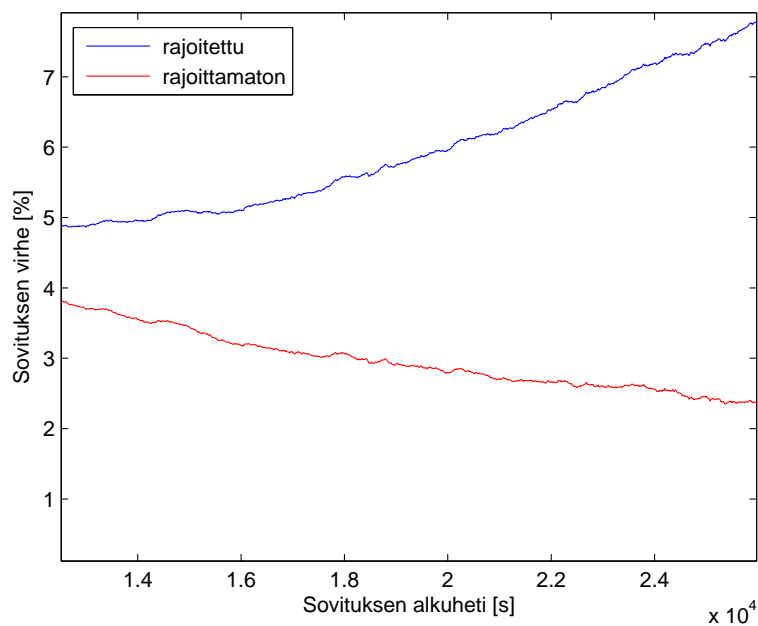
Kuva 12. Asymptoottisen mallin testiaineistoon 1 (malli (2.1)) tehdyn sovituksen virhe.

Testiaineistoa 4 generoitaessa on käytetty samoja parametreja kuin kohdassa 2.2. Sovitusten tulokset on esitetty kuvassa 13.



Kuva 13. Asymptoottisen mallin sovitus äärellisen pituisen lämmönlähteen mallilla generoituun testiaineistoon 4.

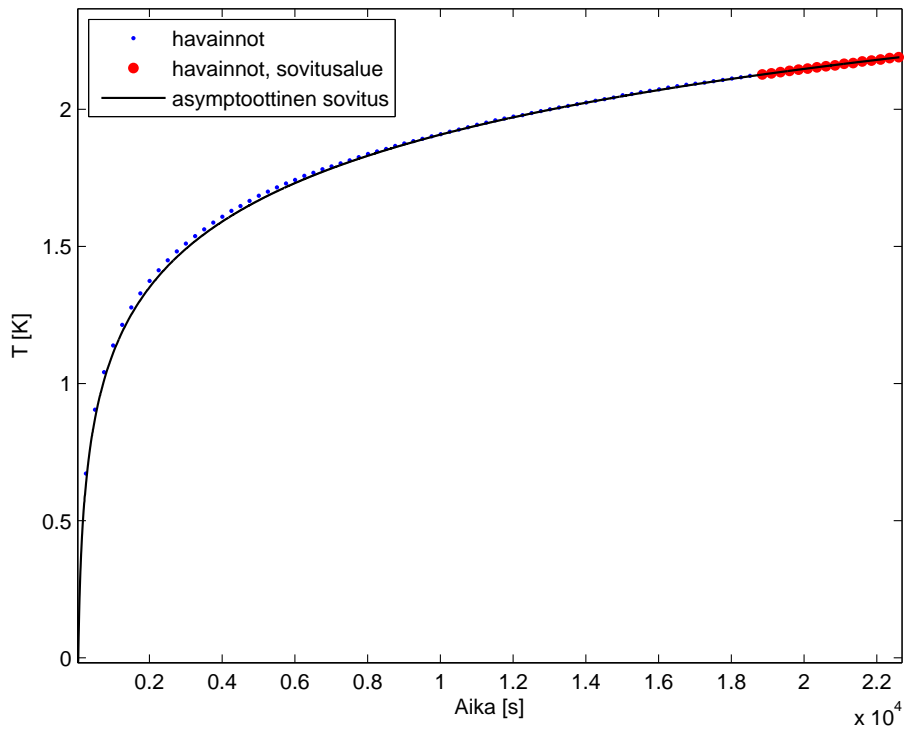
Kuvasta 13 näemme, että kuuden tunnin mittausaika on melko optimaalinen, kun kallion lämmönjohtumiskerroin on noin $K = 3 \text{ W/m K}$. Tätä paremmilla lämmönjohteilla äärellisen pituuden vaikutus alkaa näkyä jo aikaisemmin. Vaikutuksen suuruutta voidaan arvioida generoimalla testiaineistoa sekä äärellisellä mallilla (2.5) että vastaavalla äärettömän pitkän lämmönlähteen mallilla (2.7) ja tekemällä niihin asymptoottisen mallin (2.8) sovitukset. Tulokset on esitetty kuvassa 14 tapauksessa $K = 4,6 \text{ W/m K}$. Kuvasta 14 havaitaan, että asymptoottisen mallin sovituksen antama lämmönjohtumiskerroin poikkeaa oikeasta arvostaan noin kahdesta kolmeen prosenttiyksikköä enemmän, kun käytetään äärellisen pituisen lämmönlähteen mallilla tuotettua testiaineistoa 4 ja verrataan sitä vastaavan äärettömän pitkän lämmönlähteen mallilla generoitua testiaineistoon tehdyn sovituksen antamaan lämmönjohtumiskertoimeen.



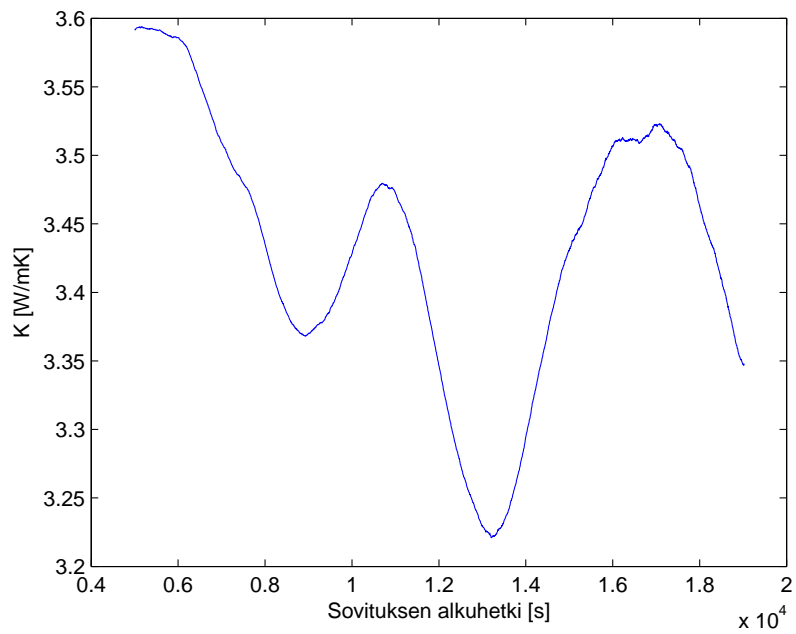
Kuva 14. Asymptoottisen mallin sovitus äärellisen pituisen ja äärettömän pitkän lämmönlähteen malleilla generoituihin testiaineistoihin.

2.3.3 Sovituksia mitattuihin koetuloksiin

Tarkastellaan lopuksi asymptoottisen mallin sovitusta mittaustuloksiin. Kuvassa 15 on esitetty asymptoottisen mallin antama sovitus (joka viideskymmenes havaintopiste on näytetty). Kuvassa 16 on asymptoottisen mallin mittaustuloksiin tehdyn sovituksen tuottama lämmönjohtumiskerroin, kun sovitus tehtiin tunnin aikasarjaan mittauksen eri vaiheissa. Keskiarvona kuvan 16 tuloksista saamme kallion lämmönjohtumiskertoimen arvoksi $K_2 = (3,43 \pm 0,10) \text{ W/m K}$. Tulos sopii hyvin yhteen mallin 2 ja mallin (2.1) antamien tulosten $K_2 = 3,47 \text{ W/m K}$ ja $K_2 = 3,55 \text{ W/m K}$ kanssa. Asymptoottisen mallin antaman lämmönjohtumiskertoimen suhteellisen suuri vaihtelu valitun sovituskäytännön mukaan johtuu kuvassa 6 esitetystä lämmitystehon vaeltelusta mittauksen aikana.



Kuva 15. Asymptoottisen mallin sovitus tunnin pituiseen osaan mittauspisteistä.



Kuva 16. Saatu lämmönjohtumiskerroin, kun asymptoottinen malli on sovitettu tunnin pituisiin osiin mittauspisteistä, joiden alkuhetki vaihtelee.

3 JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Kokoamalla yhteen edellä esitetyt arviot eri virhelähteille voimme päätellä, että asymp-toottisella mallilla päästään systemaattisten virheiden osalta noin viiden prosentin tark-kuuteen. Näiltä osin analyttisellä mallilla (malli 2) päästään hieman parempaan tark-kuuteen. Malleja vertailtaessa asymp-toottisella mallilla on kaksi etua. Asymp-toottisessa mallissa ei tarvita muuta tietoa laitteen yksityiskohdista kuin teho pituusyksikköä kohti. Toiseksi malli on laskennallisesti kevyt.

Analyttisen mallin etuna on parempi tarkkuus systemaattisten virheiden osalta. Tätä etua tosin kaventaa se, että mittalaitteesta tarvitaan yksityiskohtaisempaa mitattua tietoa. Pi-demmän sovitusaikajakson vuoksi analyttinen malli 2 ei ole yhtä herkkä lämmitystehon pienille fluktuatioille kuin asymp-toottinen malli. Analyttinen malli vaatii luonnollisesti enemmän laskenta-aikaa kuin asymp-toottinen malli, mutta laskenta-ajat ovat kaiken kaik-kiaan hyvin kohtuullisia. Analyttisen mallin yhteensopivuudesta mittaustulosten kanssa koko mittausjakson ajalta voidaan myös varmistaa mittauksen luotettavuus.

Tässä työssä tarkastellussa 56 mm:n halkaisijaisen reiän tapauksessa saatuja tuloksia voi tietyllä varauksella pitää soveltuvina myös 76 mm:n halkaisijaiselle reiälle. Suurimman eron voi arvella olevan tulosten aikakäyttäytymisessä, johon liittyy integraaleissa (esim. (1.3)) esiintyvä tekijä $\kappa_2 t u^2 / a^2$. Tarkempi tieto saadaan tekemällä vastaavat tarkastelut 76 mm:n halkaisijaiselle reiälle.

LÄHDELUETTELO

- [1] J. H. Blackwell, A Transient-Flow Method for Determination of Thermal Constants of Insulating Materials in Bulk, Part I - Theory. *Journal of Applied Physics*, 25 (2), 137 – 144 (1954).
- [2] J. H. Blackwell, Radial-axial Heat Flow in Regions Bounded Internally by Circular Cylinders. *Canadian Journal of Physics*, 31, 472 – 479 (1953).
- [3] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (2nd Ed.). Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [4] I. Kukkonen, I. Suppala, A. Korpisalo and T. Koskinen, TERO Borehole Logging Device and Test Measurements of Rock Thermal Properties in Olkiluoto. Posiva Oy, Report Posiva 2005-09 (2005).
- [5] I. Kukkonen, I. Suppala, A. Korpisalo and T. Koskinen, Drill Hole Logging Device TERO76 for Determination of Rock Thermal Properties. Posiva Oy, Report Posiva 2007-1 (2007).